

2.8.2 Lineární rovnice s parametrem II

Předpoklady: 2801

Pedagogická poznámka: Zvládnutí zápisu a obecného postupu (dělení podle hodnot parametru) při řešení parametrických rovnic v této hodině je zásadní podmínkou několika následujících hodin. Proto by ti, kteří příklady nestihnou a o hodině počítali s problémy, měli dopočítat hodinu doma.

Př. 1: Vyřeš rovnici $2xp + p(1-x) = 3p - 4 + 2x$ s neznámou x a parametrem p .

$$2xp + p(1-x) = 3p - 4 + 2x$$

$$2xp - xp + p = 3p - 4 + 2x$$

$$xp + p = 2x - 4 + 3p$$

$$xp - 2x = 2p - 4$$

$$x(p-2) = 2p-4$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $p-2$, což může být problém, protože se nesmí dělit nulou.

\Rightarrow Zjistíme, zda je výraz $p-2$ někdy roven nule: $p-2=0 \Rightarrow p=2$. Pokud chceme dělit, musíme $p=2$ vyloučit, abychom nedělili nulou.

\Rightarrow **rozvětvení**

$$p \neq 2$$

Můžeme vydělit rovnici výrazem $p-2$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$x(p-2) = 2p-4 \quad /: (p-2)$$

$$x = \frac{2p-4}{p-2} = \frac{2(p-2)}{p-2} = 2$$

$$K = \{2\}$$

$$p = 2$$

Nemůžeme vydělit výrazem $p-2$, ale víme, které konkrétní p nás zajímá a můžeme ho dosadit do rovnice před vydělením. \Rightarrow

$$x(2-2) = 2 \cdot 2 - 4$$

$$0x = 2 \cdot 2 - 4$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{za } x \text{ můžeme dosadit cokoliv}$$

$$\Rightarrow K = R$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$p \neq 2$	$K = \{2\}$
$p = 2$	$K = R$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý, protože studenti zjistí, že k hodnotám parametru, které vylučují z dělení, není možné psát rovnou $K = \emptyset$. Dalším zajímavým rysem příkladu je jediná hodnota x pro všechna $p \neq 2$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad 2 a příklad 4 jsou sice z hlediska řešení rovnic s parametrem jakoby zbytečné, ale mají obrovský význam pro pochopení podstaty parametrických rovnic. Právě podobným zkoušením studenti poznají, že přehledy na konci příkladů mají svůj význam.

Př. 2: Pomocí závěrečného přehledu předchozího příkladu rozhodni, zda rovnice

$$2xp + p(1-x) = 3p - 4 + 2x \text{ vyjde, když dosadíme:}$$

a) $p = 1, x = 3$

b) $p = \sqrt{2}, x = 2$

c) $p = 2, x = \pi$

Své rozhodnutí ověř dosazením do rovnice.

a) $p = 1, x = 3$

Hodnota parametru se nerovná 2, jde o první řádku přehledu. Hodnotou x má být dvojka, pro dvojici čísel $p = 1, x = 3$ rovnice nevyjde.

$$2xp + p(1-x) = 3p - 4 + 2x$$

$$2 \cdot 3 \cdot 1 + 1(1-3) = 3 \cdot 1 - 4 + 2 \cdot 3$$

$$4 = 5$$

b) $p = \sqrt{2}, x = 2$

Hodnota parametru se nerovná 2, jde o první řádku přehledu. Hodnotou x má být dvojka, pro dvojici čísel $p = \sqrt{2}, x = 2$ rovnice vyjde.

$$2xp + p(1-x) = 3p - 4 + 2x$$

$$2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}(1-2) = 3 \cdot \sqrt{2} - 4 + 2 \cdot 2$$

$$4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

c) $p = 2, x = \pi$

Hodnota parametru se rovná 2, jde o druhou řádku přehledu. Hodnotou x může být cokoliv, pro dvojici čísel $p = 2, x = \pi$ rovnice vyjde.

$$2xp + p(1-x) = 3p - 4 + 2x$$

$$2 \cdot \pi \cdot 2 + 2(1-\pi) = 3 \cdot 2 - 4 + 2 \cdot \pi$$

$$4\pi + 2 - 2\pi = 6 - 4 + 2\pi$$

$$2 + 2\pi = 2 + 2\pi$$

Př. 3: Vyřeš rovnici $t(3+t)x = 2t$ s neznámou x a parametrem t .

$$t(3+t)x = 2t$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $t(3+t)$, ale nesmíme dělit nulou. \Rightarrow Kdy je výraz $t(3+t)$ roven nule: $t(3+t) = 0 \Rightarrow t = 0; t = -3$. Pokud chceme dělit, musíme tato čísla vyloučit.

\Rightarrow **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou proto píšeme pod sebe).

$t \neq 0; -3 \Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $t(3+t)$, protože se určitě nebude rovnat nule:

$$t(3+t)x = 2t \quad / : t(3+t)$$

$$x = \frac{2t}{t(3+t)}$$

$$x = \frac{2}{(3+t)}$$

$t = 0 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$t(3+t)x = 2t$$

$$0(3+0)x = 2 \cdot 0$$

$$x \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{můžeme dosadit cokoliv} \Rightarrow K = R$$

$t = -3 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$t(3+t)x = 2t$$

$$-3(3-3)x = 2 \cdot (-3)$$

$$x \cdot 0 = -6 \quad \Rightarrow \quad \text{nikdy nevyjde} \quad \Rightarrow \quad K = \emptyset$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$t \neq -3; 0$	$K = \left\{ \frac{2}{3+t} \right\}$
$t = 0$	$K = R$
$t = -3$	$K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: Častou „chybou“ bývá roznásobení závorek s parametrem na levé straně. Studenti pak pracně zjišťují, jaké hodnoty t mají zakázat. Určitě byste se o tom měli zmínit.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu (a některých následujících) je větvení příkladu napsáno pod sebe. Důvodem je malá šířka tří sloupců vedle sebe. V sešitech přesto doporučuji studentům tři sloupce zachovat.

Př. 4: Pomocí závěrečného přehledu předchozího příkladu najdi řešení rovnice $t(3+t)x = 2t$, pro následující hodnoty parametru t :

a) $t = 1$ b) $t = -3$ c) $t = \sqrt{5}$ d) $t = 0$

a) $t = 1$

Hodnota parametru je různá od 0 i -3, jde o první řádku přehledu. Pro x platí:

$$x = \frac{2}{3+t} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}. \quad x = 0,5.$$

b) $t = -3$

Hodnota parametru se rovná -3, jde o třetí řádku přehledu. $K = \emptyset$, neexistuje žádné x vyhovující rovnici.

c) $t = \sqrt{5}$

Hodnota parametru je různá od 0 i -3, jde o první řádku přehledu. Pro x platí:

$$x = \frac{2}{3+t} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

d) $t = 0$

Hodnota parametru se rovná 0, jde o druhou řádku přehledu. $K = R$, za x mohu dosadit libovolné reálné číslo.

Př. 5: Vyřeš rovnici $x(p^2 - 1) = p^2 + p$ s neznámou x a parametrem p .

$$x(p^2 - 1) = p^2 + p$$

$$x(p+1)(p-1) = p(p+1)$$

Chceme vydělit rovnici výrazem $(p+1)(p-1)$ a nesmíme dělit nulou. \Rightarrow Kdy je výraz $(p+1)(p-1)$ roven nule: $(p+1)(p-1) = 0 \Rightarrow p = \pm 1$. Pokud chceme dělit, musíme tato čísla vyloučit.

\Rightarrow **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe).

$p \neq \pm 1 \Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $(p+1)(p-1)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(p+1)(p-1) = p(p+1) \quad / : (p+1)(p-1)$

$$x = \frac{p(p+1)}{(p-1)(p+1)}$$

$$x = \frac{p}{p-1} \quad K = \left\{ \frac{p}{p-1} \right\}$$

$p = -1 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$x(p+1)(p-1) = p(p+1)$$

$$x(-1+1)(-1-1) = -1(-1+1)$$

$$x \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{můžeme dosadit cokoliv} \Rightarrow K = R$$

$p = 1 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$x(p+1)(p-1) = p(p+1)$$

$$x(1+1)(1-1) = 1(1+1)$$

$$x \cdot 0 = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{nikdy nevyjde} \quad \Rightarrow \quad K = \emptyset$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$p \neq \pm 1$	$K = \left\{ \frac{p}{p-1} \right\}$
$p = -1$	$K = R$
$p = 1$	$K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: Občas se objevuje při řešení tohoto příkladu ještě jedna větev řešení pro hodnotu parametru $p = 0$. Vypadá takto:

$$x(p+1)(p-1) = p(p+1) \quad \text{dosadím } p = 0.$$

$$x(0+1)(0-1) = 0(0+1)$$

$$-x = 0$$

$$x = 0.$$

V přehledu pak přibude další řádka:

$p = 0$	$K = \{0\}$
---------	-------------

Není možné říct, že by tento krok byl vyloženě špatně. Je však vyloženě nesmyslný. Hodnota parametru $p = 0$ není z hlediska řešení příkladu vůbec zajímavá. Výraz p se v rozkladu na pravé straně vyskytuje, ale nikdy s ním nedělíme a jeho hodnota tak může být libovolná.

Řešení pro $p = 0$ tak je obsaženo už v prvním řádku přehledu a umožňuje nám určit hodnotu

x daleko rychleji: $x = \frac{p}{p-1} = \frac{0}{0-1} = 0$.

Př. 6: Vyřeš rovnici $p(xp-1) = 1-x$ s neznámou x a parametrem p .

$$p(xp-1) = 1-x$$

$$xp^2 - p = 1-x$$

$$xp^2 + x = p+1$$

$$x(p^2+1) = p+1$$

Chceme vydělit rovnici výrazem (p^2+1) a nesmíme dělit nulou. \Rightarrow Výraz (p^2+1) je vždy větší než nula \Rightarrow můžeme dělit pro všechny hodnoty p .

$$x = \frac{p+1}{p^2+1}$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :

$$p \in R$$

Řešení pro x :

$$K = \left\{ \frac{p+1}{p^2+1} \right\}$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde samozřejmě o to, aby studenti neštěpili řešení a vše zahrnuli najednou.

Př. 7: Urči, pro které hodnoty parametru p je řešením rovnice $p(xp+1) = 2(x+1) + xp$ kladné číslo.

Řešíme rovnici: $p(xp+1) = 2(x+1) + xp$.

$$xp^2 + p = 2x + 2 + xp$$

$$xp^2 - xp - 2x = 2 - p$$

$x(p^2 - p - 2) = 2 - p$ Budeme chtít zjistit, kdy je možné výrazem v závorce dělit \Rightarrow

rozložíme ho na součin: $p^2 - p - 2 = (p-2)(p+1)$.

Chceme vydělit rovnici výrazem $(p-2)(p+1)$ a nesmíme dělit nulou. \Rightarrow Kdy je výraz

$(p-2)(p+1)$ roven nule: $(p-2)(p+1) = 0 \Rightarrow p = -1; 2$. Pokud chceme dělit, musíme tato čísla vyloučit.

\Rightarrow **rozvětvení na tři větve** (vedle sebe se nevejdou, proto píšeme pod sebe).

$p \neq -1; 2 \Rightarrow$ můžeme vydělit rovnici výrazem $(p-2)(p+1)$, protože se určitě nebude rovnat nule: $x(p-2)(p+1) = 2-p \quad /: (p-2)(p+1)$

$$x = \frac{2-p}{(p-2)(p+1)} = -\frac{1}{p+1} \quad K = \left\{ -\frac{1}{p+1} \right\}$$

$p = -1 \Rightarrow$ nemůžeme dělit, dosadíme \Rightarrow

$$x(p-2)(p+1) = 2-p$$

$$x(-1-2)(-1+1) = 2-(-1)$$

$$x \cdot 0 = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{nikdy nevyjde} \Rightarrow K = \emptyset$$

$$p = 2 \Rightarrow \text{nemůžeme dělit, dosadíme} \Rightarrow$$

$$x(p-2)(p+1) = 2-p$$

$$x(2-2)(p+1) = 2-2$$

$$x \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{můžeme dosadit cokoliv} \Rightarrow K = R$$

Závěrečný přehled:

Hodnoty parametru p :	Řešení pro x :
$p \neq -1; 2$	$K = \left\{ -\frac{1}{p+1} \right\}$
$p = -1$	$K = \emptyset$
$p = 2$	$K = R$

Nejsme hotoví, zajímá nás, kdy je řešením kladné číslo, projdeme tabulku:

$$p \neq -1; 2 \quad x = -\frac{1}{p+1} > 0 \quad \text{řešíme nerovnici} \quad -\frac{1}{p+1} > 0$$

$$\frac{1}{p+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad p+1 < 0 \quad p < -1$$

$$p = -1 \quad K = \emptyset \quad \text{nevyjde nic, natož kladné číslo}$$

$$p = 2 \quad K = R \quad \text{některá z čísel, která vyšla, jsou kladná}$$

Rovnice má kladné řešení právě když $p \in (-\infty; -1) \cup \{2\}$.

Př. 8: Petáková:

strana 21/cvičení 1 a) b) d)

strana 21/cvičení 2

strana 21/cvičení 3

Shrnutí: Rovnice s parametrem řešíme stejně jako rovnice bez parametru, pouze v okamžiku, kdy provádíme operace, které není možné provést se všemi čísly, rozebereme možné hodnoty parametru a případně rozdělíme řešení.